**К задачам на четность относятся:**

* **задачи на чередование**
* **задачи на разбиение на пары**
* **задачи на четность и нечетность**

**Задачи на чередование**

***Свойства*:**

1. Если в некоторой замкнутой цепочке чередуются объекты двух видов, то их четное число (и каждого вида поровну).
2. Если в некоторой замкнутой цепочке чередуются объекты двух видов:
3. начало и конец цепочки разных видов, то в ней четное число объектов;
4. начало и конец одного вида, то нечетное число.

***Обратно:***

1. По четности длины чередующейся цепочки можно узнать, одного или разных видов её начало и конец.

**№1.** 16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них разложить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?

**№2.** Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

**Задачи на разбиение на пары**

***Свойство*:**

**Если предметы можно разбить на пары, то их количество четно.**

**№1.** Соединили 4 города между собой дорогами, так чтобы из каждого города выходило ровно 3 дороги. Сколько дорог получилось?

**№2.** Можно ли соединить 15 городов дорогами, так чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог?

**Задачи на четность и нечетность**

***Свойства:***

1. Ч ± Ч = Ч
2. Ч ± Н = Н
3. Н ± Н = Ч
4. Ч \* Ч = Ч
5. Ч \* Н = Ч
6. Н \* Н = Н

**№1.** В магазин «Малыш» привезли новые игрушки. Могут ли десять игрушек ценой в 9, 5 или 7 рублей стоить в сумме 71 рубль?

**№2.** Филя перемножил 17 целых чисел и получил 1025, а Степашка сложил эти же числа и получил 100. Докажите, что кто-то из них ошибся.

**Задачи на четность повышенной сложности\***

**№1.** На 99 карточках пишутся числа 1, 2, 3, ..., 99. Затем карточки перемешиваются, раскладываются чистыми сторонами вверх и на чистых сторонах снова пишутся числа 1, 2, 3, 4, ..., 99. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются и 99 полученных сумм перемножаются. Доказать, что в результате получится чётное число.

**№2.** На волшебной яблоне выросли 15 бананов и 20 апельсинов. Одновременно разрешается срывать один или два плода. Если сорвать один из плодов вырастет такой же, если сорвать сразу два одинаковых плода – вырастет апельсин, а если два разных – вырастет банан.

  а) В каком порядке надо срывать плоды, чтобы на яблоне остался ровно один плод?

  б) Можете ли вы определить, какой это будет плод?

  в) Можно ли срывать плоды так, чтобы на яблоне ничего не осталось?

**№3.** На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1984, 1985. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

**№4.** За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа – мальчики.

**№5.** Лиса и два медвежонка делят 100 конфет. Лиса раскладывает конфеты на три кучки; кому какая достанется - определяет жребий. Лиса знает, что если медвежатам достанется разное количество конфет, то они попросят её уравнять их кучки, и тогда она заберёт излишек себе. После этого все едят доставшиеся им конфеты.

   а) Придумайте, как Лисе разложить конфеты по кучкам так, чтобы съесть ровно 90 конфет (ни больше, ни меньше).

  б) Может ли Лиса сделать так, чтобы в итоге съесть ровно 65 конфет?

№6. На столе лежит 10 кучек с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 орехами. Двое играющих берут по очереди по одному ореху. Игра заканчивается, когда на столе останется три ореха. Если это – три кучки по одному ореху, выигрывает тот, кто ходил вторым, иначе – его соперник. Кто из игроков может выиграть, как бы не играл соперник?

№7. Придя в школу, Коля и Алиса обнаружили на доске надпись: "ГОРОДСКАЯ УСТНАЯ ОЛИМПИАДА". Они договорились сыграть в следующую игру: за один ход в этой надписи разрешается стереть произвольное количество одинаковых букв, а выигрывает тот, кто стирает последнюю букву. Первым ходил Коля и стёр последнюю букву "А". Как надо играть Алисе, чтобы обеспечить себе выигрыш?

№8. На доске выписаны числа от 1 до 50. Разрешено стереть любые два числа и вместо них записать одно число – модуль их разности. После 49-кратного повторения указанной процедуры на доске останется одно число. Какое это может быть число?

№9. Среди *n* рыцарей каждые двое – либо друзья, либо враги. У каждого из рыцарей ровно три врага, причём враги его друзей являются его врагами.   
При каких *n* такое возможно?

№10. Во взводе служат три сержанта и несколько солдат. Сержанты по очереди дежурят по взводу. Командир издал такой приказ:

1. За каждое дежурство должен быть дан хотя бы один наряд вне очереди.
2. Никакой солдат не должен иметь более двух нарядов и получать более одного наряда за одно дежурство.
3. Списки получивших наряды ни за какие два последних дежурства не должны совпадать.
4. Сержант, первым нарушивший одно из изложенных выше правил, наказывается гауптвахтой.

***Сможет ли хотя бы один из сержантов, не сговариваясь с другими, давать наряды так, чтобы не попасть на гауптвахту?***

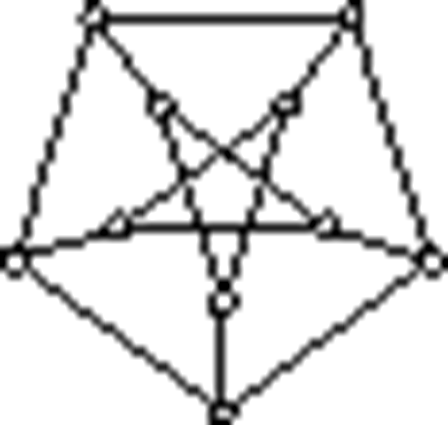
**№11.** Переаттестация Совета Мудрецов происходит так:

1. король выстраивает их в колонну по одному;
2. надевает каждому колпак белого или чёрного цветов.

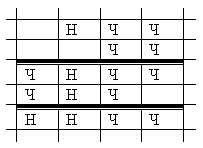
Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят.

Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из двух цветов (*каждый мудрец выкрикивает цвет один раз*). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казнённых.

Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?



**№12.** Можно ли покрасить 15 отрезков, изображённых на рисунке, в три цвета так, чтобы никакие два отрезка одного цвета не имели общего конца?



№13. Расшифровать пример на умножение, если буквой Ч зашифрованы чётные числа, а буквой Н – нечётные.

№14. В каждой клетке таблицы размером 13×13 записано одно из натуральных чисел от 1 до 25. Клетку назовём *хорошей*, если среди двадцати пяти чисел, записанных в ней и во всех клетках одной с ней горизонтали и одной с ней вертикали, нет одинаковых. Могут ли все клетки одной из главных диагоналей оказаться хорошими?

№15. Существует ли число, которое делится ровно на 50 чисел из набора 1, 2, 3, 4, 5, ..., 100?

№16. Двое играют в такую игру. Из кучки, где имеется 25 спичек, каждый берёт себе по очереди одну, две или три спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры – после того, как все спички будут разобраны, – окажется чётное число спичек.

  а) Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его партнёр? Как он должен играть, чтобы выиграть?

   б) Как изменится ответ, если считать, что выигрывает забравший нечётное число спичек?

№17. На доске записано число **123456789**. У написанного числа выбираются две соседние цифры, если ни одна из них не равна 0, из каждой цифры вычитается по 1, и выбранные цифры меняются местами (например, из 123**45**6789 можно за одну операцию получить 123**43**6789). Какое наименьшее число может быть получено в результате таких операций?

№18. На клетчатой бумаге нарисован замкнутый путь (по линиям сетки). Доказать, что он имеет чётную длину (сторона клетки имеет длину 1).

№19. В плоскости расположено 11 шестерёнок таким образом, что первая сцеплена со второй, вторая – с третьей, ..., одиннадцатая – с первой.

Могут ли они вращаться?

**Литература:**

1. Образовательный журнал для старшеклассников и учителей «Потенциал», №1, 2008;
2. Дориченко С.А., Ященко И.В.*"57 Московская математическая олимпиада. Сборник подготовительных задач"*, 1994;
3. Спивак А.В. *"Математический праздник"*, Москва, МЦНМО, 1995.
4. http://www.problems.ru